

Jiří PODEŠVA<sup>1</sup>, Alexandros MARKOPOULOS<sup>2</sup>

NELINEÁRNÍ OHYB DĚLNÍ VÝZTUŽE S VLIVEM KROUCENÍ

THE NON-LINEAR BENDING OF THE STEEL SUPPORT INCLUDING TORSION

**Abstrakt**

Nelineární ohyb ocelových výztuží vodorovných dělních děl je předmětem výpočtových analýz na bázi metody konečných prvků. Nelineární statická analýza, obsahující velké deformace, materiálové nelinearity a ztrátu stability tvaru, byla řešena pro čistý ohyb (konstantní ohybový moment podél délky nosníku) a pro ohyb se současným působením normálové síly. Výsledky byly užity pro výpočet tzv. „ekvivalentní ohybové tuhosti“  $E \cdot J$  jako funkce ohybového momentu. To umožní provádět výpočty výztuže s použitím lineárního nosníkového prvku, přičemž efekty plasticity a změny nosného profilu jsou kompenzovány změnou ohybové tuhosti. Příspěvek popisuje a kvantifikuje modelování a výsledky s uvažováním vlivu kroucení.

**Klíčová slova**

Nelinearita, ohyb, plasticita, ztráta stability tvaru, geometrická nelinearita.

**Abstract**

The non-linear bending of the horizontal mine opening steel support is the subject of the calculation analysis using the finite element method. The non-linear static analysis, which includes large deformation, material non-linearity and buckling effect, was performed for clear bending (constant bending moment along the beam length) and for bending under axial force. The results were used for calculation of so called “substitutional bending stiffness”  $E \cdot J$  as a function of bending moment. This allows to perform the calculation using the linear beam element, while plasticity and the cross section change is compensated by changing bending stiffness. This paper describes modeling and results for bending including torsion.

**Keywords**

Non-linearity, bending, plasticity, buckling, geometric non-linearity.

## 1 ÚVOD

Rozsáhlý výzkum mechanických vlastností pevné dělní výztuže vodorovných dělních děl, jež v uplynulých letech probíhal na katedře stavební mechaniky FAST, VŠB-TUO, se zaměřoval na nelineární deformační chování výztuže, zatížené ohybovým momentem a normálovou (tlakovou, jakož i tahovou) silou, viz např. [5] a [6]. Primárním výsledkem byla vždy ohybová charakteristika, tedy závislost úhlu natočení profilu na ohybovém momentu, při konstantní normálové síle. Z této charakteristiky byla následně vypočtena tzv. „ekvivalentní ohybová tuhost“ výztuže  $E \cdot J$  v závislosti na ohybovém momentu. Tato funkce dále umožňuje provádět výpočty výztuže na jednodušším výpočtovém modelu, založeném na lineárních nosníkových prvcích, viz [1].

---

<sup>1</sup> doc. Ing. Jiří Podešva, Ph.D., katedra mechaniky, Fakulta strojní, VŠB - Technická univerzita Ostrava, 17. listopadu 15, Ostrava - Poruba, tel.: +420 59 732 4350, e-mail : jiri.podesva@vsb.cz.

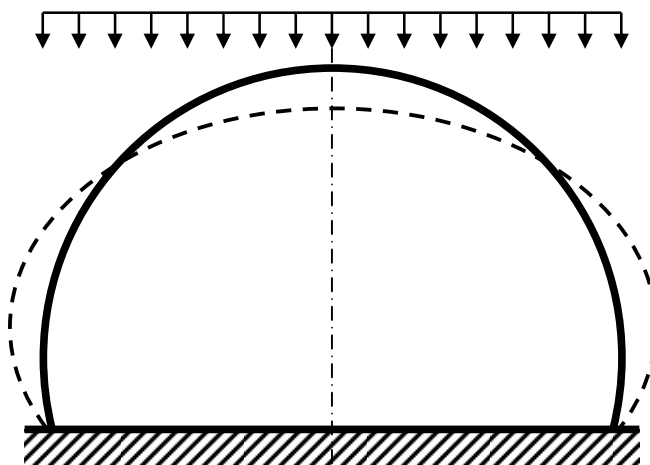
<sup>2</sup> Ing. Alexandros Markopoulos, Ph.D., katedra mechaniky, Fakulta strojní, VŠB - Technická univerzita Ostrava, 17. listopadu 15, Ostrava - Poruba, tel.: +420 59 732 9402, e-mail : alexandros.markopoulos@vsb.cz.

## 2 NLINEARITY

Lineární teorie nosníků vychází z předpokladu malých deformací, předpokladu zachování rovinnosti průřezu a z předpokladu platnosti Hookova zákona a vede k lineárnímu rozložení napětí po ploše průřezu. Ohybová tuhost je pak vyjádřena součinem  $E \cdot J$  ( $E$  je modul pružnosti v tahu,  $J$  je plošný moment setrvačnosti průřezu). Pro ocel ( $E=210$  GPa) a profil K24 ( $J=372,37$  cm<sup>4</sup>) je ohybová tuhost  $E \cdot J=781977$  N•m<sup>2</sup>. Tato hodnota je chápána jako konstanta, charakterizující odpor profilu proti ohybu.

Při ohybu ocelové důlní výztuže se však objevuje několik typů nelinearity.

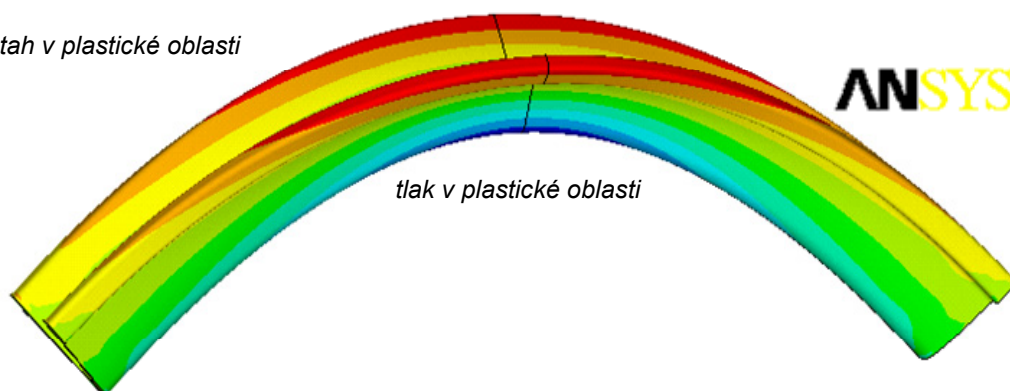
Geometrická nelinearita. Při ohybu dochází ke značné deformaci geometrie oblouku. Tím se nezanedbatelně mění silové poměry na myšleném řezu. Skutečnost velkých posunutí bodů nosníku lze do výpočtu zahrnout tak, že výpočet probíhá v iteracích a v každém iteračním kroku je korigována geometrie oblouku - změna tvaru.



Obr. 1: Deformace oblouku výztuže

Materiálová nelinearita. Ohyb výztuže může být tak masivní, že dochází ke značné plastické deformaci materiálu. Plasticitu lze do výpočtu zahrnout třeba metodou vrstev. Profil je rozdělen na tenké vrstvy. V závislosti na lineárně narůstající deformaci (zachování rovinnosti průřezu bylo ověřeno modelováním metodou konečných prvků) je každé vrstvě přiřazeno napětí a následně síla a její moment k neutrální ose.

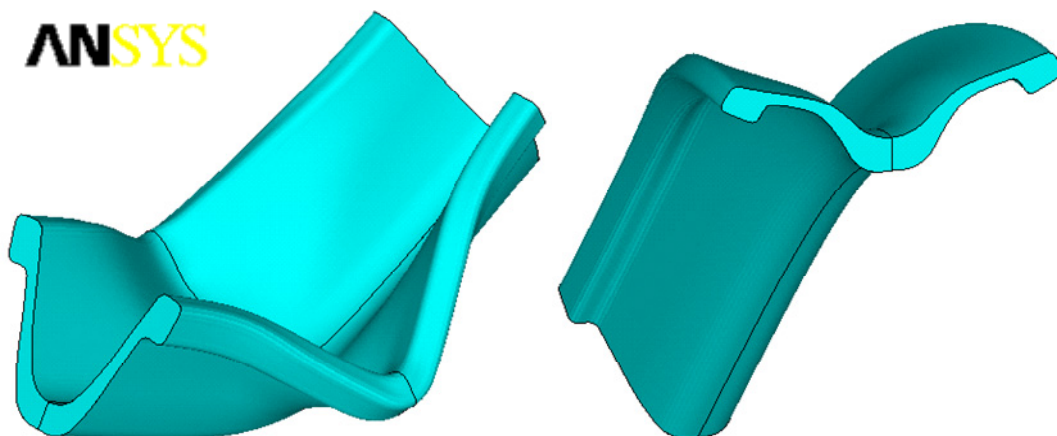
*tah v plastické oblasti*



*tlak v plastické oblasti*

Obr. 2: Plastická deformace materiálu

Změna profilu. Při ohybu dochází ke změně profilu. V závislosti na ohybovém momentu se otevřený profil otevírá stále více a jeho parametry - moment setrvačnosti - se mění. Tento efekt nelze zahrnout do výpočtového modelu.



Obr. 3: Deformace profilu při ohybu

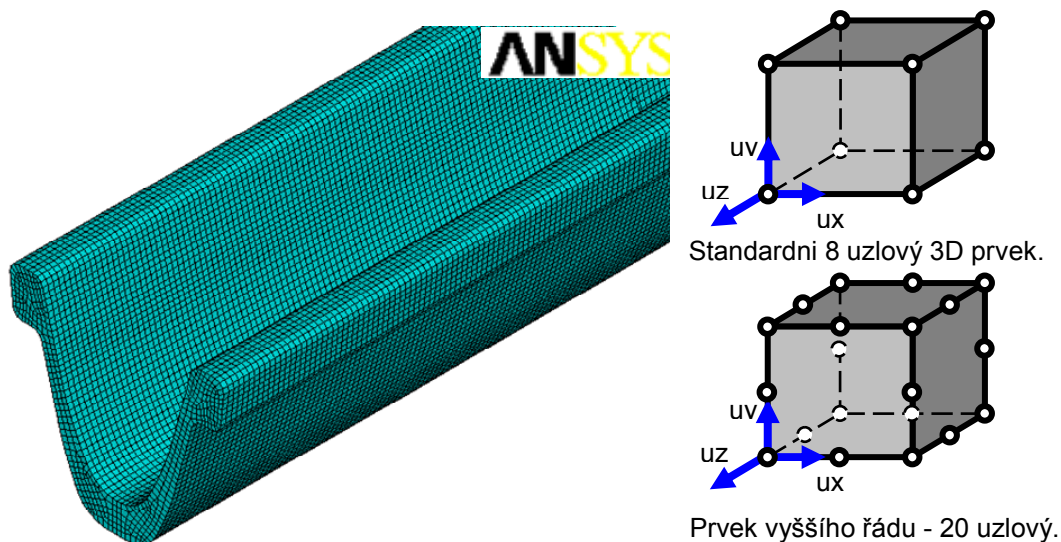
Všechny tyto nelinearity se mohou v provozu objevit a je třeba s nimi počítat.

### 3 MODELOVÁNÍ METODOU KONEČNÝCH PRVKŮ

Nelineární ohyb profilu výztuže byl předmětem počítačového modelování na bázi metody konečných prvků.

Trojrozměrný model byl vytvořen v prostředí programu Ansys. Byl použit 20 uzlový 3D prvek, tzv. „brick“, s aproximačním polynomem vyššího řádu, viz např. [2] nebo [3]. Počítačové modelování umožňuje do výpočtu zahrnout jak materiálovou nelinearitu, tak změnu profilu, viz[4].

Pro výpočet byl použit jednoduchý tri-lineární model isotropního zpevnění. Deformační charakteristika je nahrazena lomenou přímkou.



Obr. 4: Tzv. „konečnoprvkový“ model profilu

Po aktivování geometrické nelinearity (velká posunutí) se provádí opakovaný výpočet, kdy v každém iteračním kroku se v závislosti na změně geometrické konfigurace přepočítává matice tuhosti. Tím je do výpočtu zahrnut vliv změny profilu. Kromě toho lze zatěžování rozdělit na několik zatěžovacích kroků a zjistit výsledky i při nižším než konečném zatížení. (Toto rozčlenění také podporuje konvergenci výpočtu.)

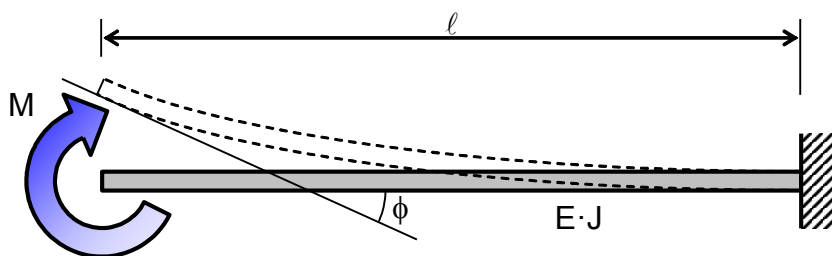
#### 4 OHYBOVÁ CHARAKTERISTIKA NOSNÍKU A EKVIVALENTNÍ TUHOST

Pro analýzu ohybové tuhosti byl zvolen jednostranně vetknutý nosník, zatížený na volném konci silovou dvojicí. Průběh ohybového momentu je po celé délce nosníku konstantní.

Úhel natočení volného konce je dán výrazem:

$$\phi = \frac{M \cdot \ell}{E \cdot J} \quad (1)$$

kde:  $M$  je ohybový moment,  
 $\ell$  je délka nosníku,  
 $E$  je modul pružnosti v tahu,  
 $J$  je plošný moment setrvačnosti.

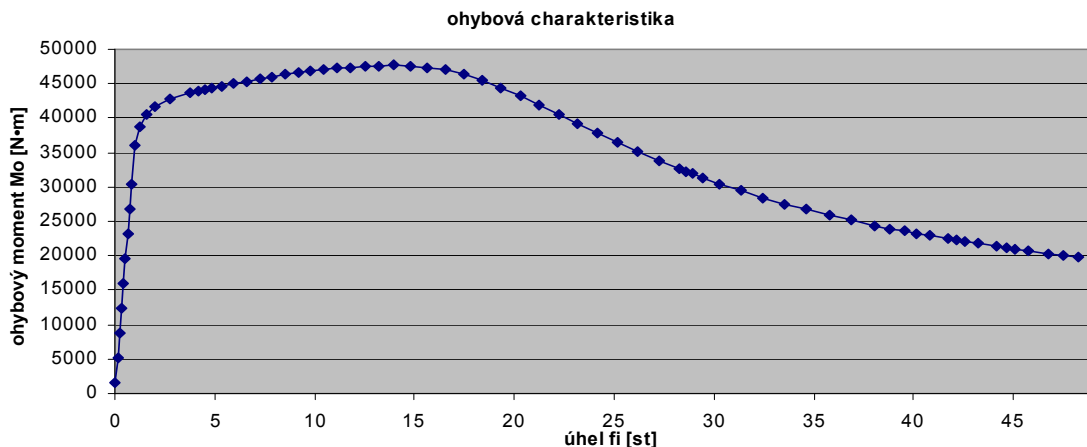


Obr. 5: Ohyb dokonale vetknutého nosníku

Z důvodu konvergence řešení i po překonání vrcholu charakteristiky, kdy již dochází k jejímu měknutí, není do výpočtu zadáván přímo ohybový moment ale deformace, natočení volného konce nosníku. Síly jsou zjištěny následně jako reakce v uložení.

Výstupem výpočtu je postupně narůstající úhel ohnutí  $\phi$  a odpovídající ohybový moment  $M_0$ . Závislost ohybového momentu  $M_0$  na úhlu ohnutí  $\phi$  představuje ohybovou charakteristiku. Lze na ní pozorovat počáteční lineární úsek (odpovídající lineární teorii nosníků) až do úhlu ohnutí cca  $1,2^\circ$ , ohybový moment  $39\,000\text{ N}\cdot\text{m}$ . Pak však, zejména v důsledku zplastizování, později též v důsledku změny profilu, zaznamenáváme podstatně zpomalený nárůst ohybového momentu, resp. výrazně zrychlený ohyb (v závislosti na momentu). Při úhlu ohnutí cca  $14^\circ$ , ohybový moment  $47\,650\text{ N}\cdot\text{m}$ , dochází k výraznému otevření profilu (viz obrázek níže) a tím ke snížení tuhosti. K ohybu pak je již zapotřebí menšího momentu. Tento bod představuje ztrátu stability tvaru. Při zachování zatížení následuje zhroucení konstrukce.

Poznámka: Ztráta stability tvaru zde nemá charakter vzpěru přímých prutů pod vlivem tlakové síly. Ztráta stability tvaru je způsobena otevřením profilu nosníku vlivem ohybového momentu (viz obr. 3). Tato změna profilu nezávisí přímo na délce nosníku.



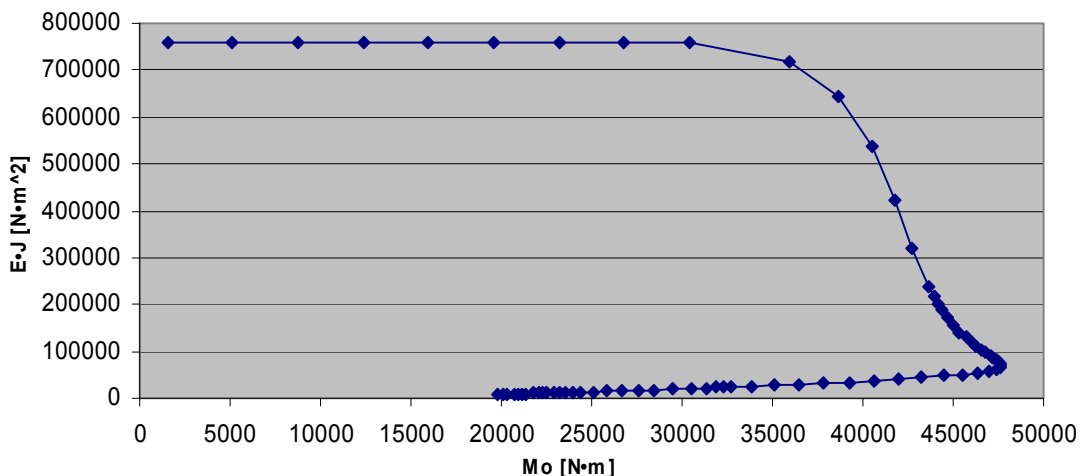
Obr. 6: Ohybová charakteristika

Náhly pokles tuhosti v důsledku otevření profilu nelze přímo zahrnout do výpočtového programu (MS Excel). Lze však využít iteračního cyklu, sloužícího k zahrnutí geometrické nelinearity - změny geometrie oblouku. V každém iteračním kroku se přepočítávají ohybové momenty v závislosti na změně geometrie. Tento „update“ lze doplnit o pokles ohybové tuhosti  $E \cdot J$  tak, aby odpovídala ohybovému momentu. Z výrazu (1) lze ukázat, že ohybová tuhost je:

$$E \cdot J_{(M)} = \frac{M \cdot \ell}{\phi} \quad (2)$$

z něhož lze pro každý stav ohnutí ( $M-\phi$ ) určit ekvivalentní ohybovou tuhost  $E \cdot J$ .

#### Charakteristika EJ-Mo



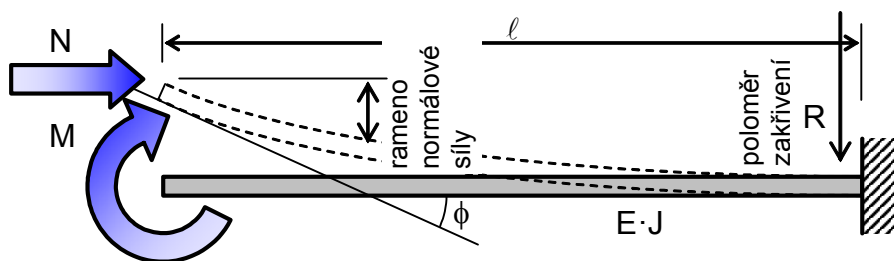
Obr. 7: Ekvivalentní ohybová tuhost  $E \cdot J$  jako funkce ohybového momentu  $M_o$ .

Z průběhu je zřejmé, že při zatěžování do cca 30 000 N·m (lineární oblast) je ekvivalentní tuhost konstantní a odpovídá skutečnému součinu modulu pružnosti  $E$  a momentu setrvačnosti  $J$  (viz výše). Dále pak ekvivalentní tuhost klesá vlivem zplastizování a později též vlivem snížení momentu setrvačnosti profilu. Bod zvratu průběhu (maximální moment asi 48 000 N·m, ekvivalentní ohybová tuhost  $E \cdot J$  asi 74 000 N·m<sup>2</sup>) představuje bod ztráty stability tvaru.

Zahrneme-li do iteračního výpočtu závislost ohybové tuhosti na ohybovém momentu ( $E \cdot J = f_{(M_o)}$ ), lze tak nepřímo zahrnout jak vliv plasticity, tak zejména změnu profilu - jeho otevření.

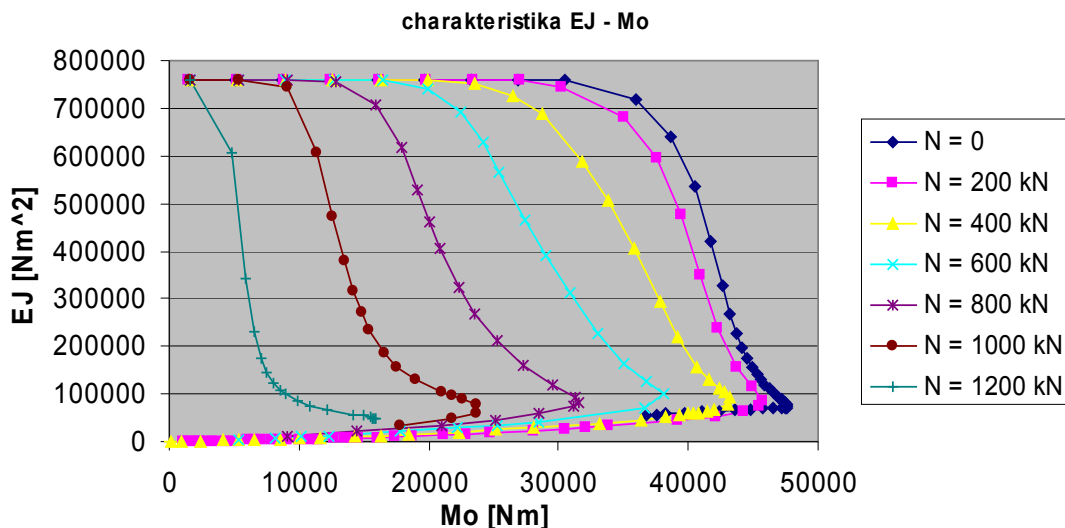
## 5 VLIV NORMÁLOVÉ SÍLY

Výpočet, uvedený v předchozí kapitole, se týká nosníku, namáhaného čistým ohybovým momentem. Ve skutečnosti však je ohybový moment kombinován normálovou silou, obvykle tlakovou. Přítomnost normálové síly nezanedbatelné hodnoty ovlivní tvar charakteristiky a následně i závislost ekvivalentní tuhosti na ohybovém momentu  $E \cdot J = f_{(M_0)}$ .



Obr. 8: Ohyb při působení normálové síly

Uvedený postup pak vede ke stanovení závislosti ekvivalentní tuhosti  $E \cdot J$  na ohybovém momentu  $M_0$  pro různé hodnoty normálové síly  $N$  ( $\in (0, 1200 \text{ kN})$ ).



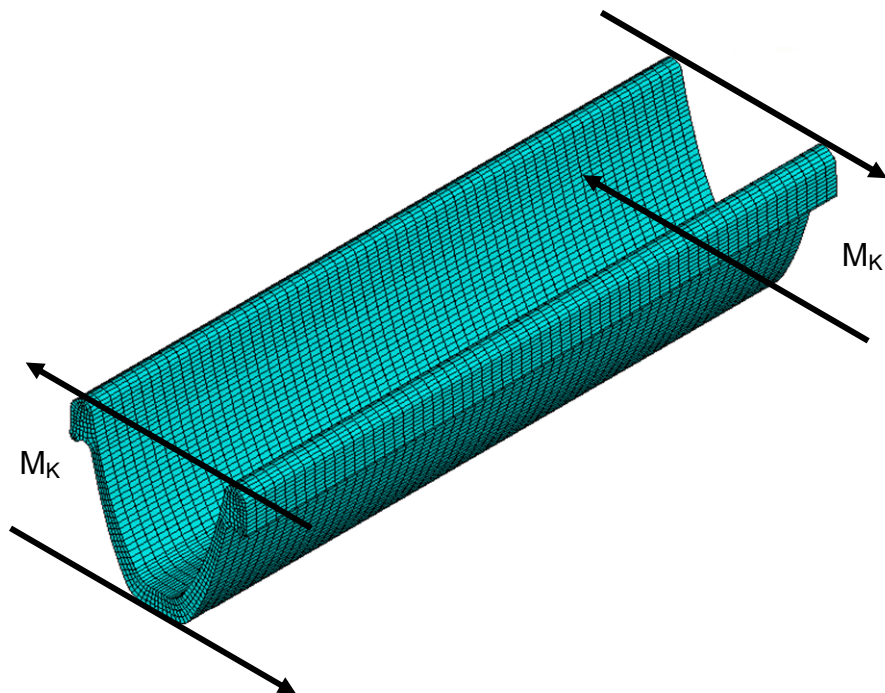
Obr. 9: Ekvivalentní ohybová tuhost  $E \cdot J$  jako funkce ohybového momentu  $M_0$ .

Popsaný postup byl realizován pro ohyb nosníku na obě strany. Zejména po znatelné deformaci profilu, odlišné při obou směrech ohýbání, jsou charakteristiky  $E \cdot J - M_0$  pro oba směry ohýbání kvantitativně odlišné.

## 6 OHYB SE SOUČASNÝM KROUCENÍM

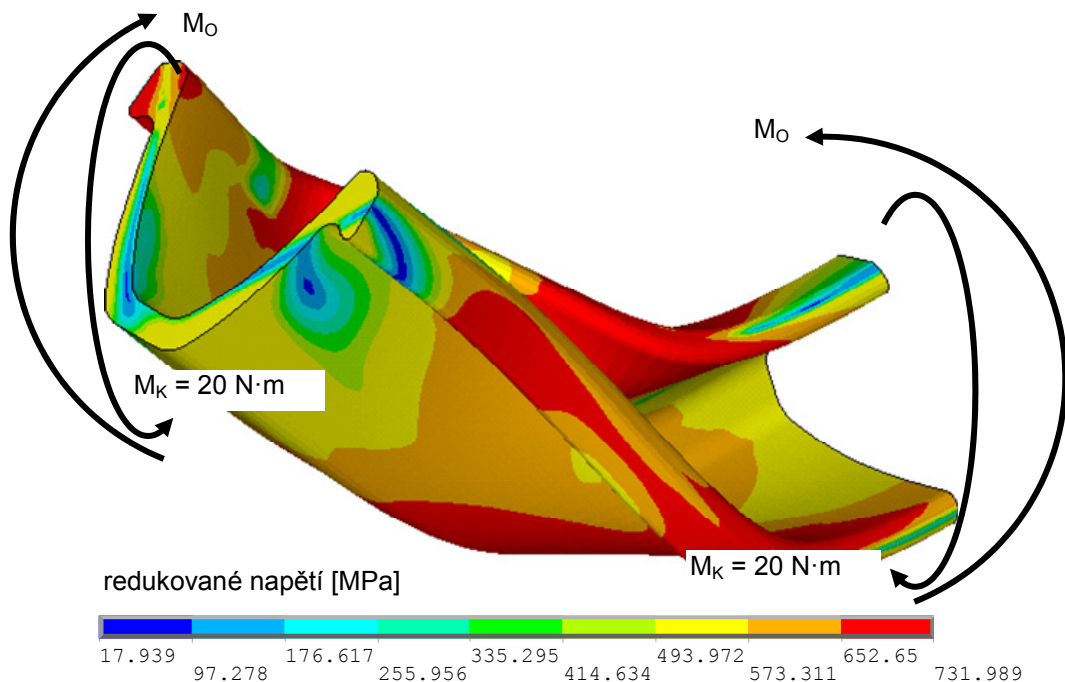
Dále byl do výpočtového modelu zahrnut krouticí moment k podélné ose nosníku.

Velikost krouticího momentu byla odstupňována na  $M_K = 20 \text{ N} \cdot \text{m}$ ,  $M_K = 100 \text{ N} \cdot \text{m}$ ,  $M_K = 200 \text{ N} \cdot \text{m}$  a  $M_K = 300 \text{ N} \cdot \text{m}$ . Zatěžování bylo aplikováno stejným způsobem, jako při kombinaci ohybu a normálové síly. Tedy nejprve krouticí moment v plné výši bez ohybového momentu, následně pak ohybový moment postupně narůstající do své plné výše.



Obr. 10: Namáhání nosníku krouticím momentem

Krouticí moment  $M_K = 20 \text{ N}\cdot\text{m}$  má na nosník minimální vliv. Redukované napětí dosahuje hodnoty  $\sigma_{\text{red}} = 10 \text{ MPa}$ , ovšem pouze lokálně, v místě působící silové dvojice, nikoliv po celém průřezu.



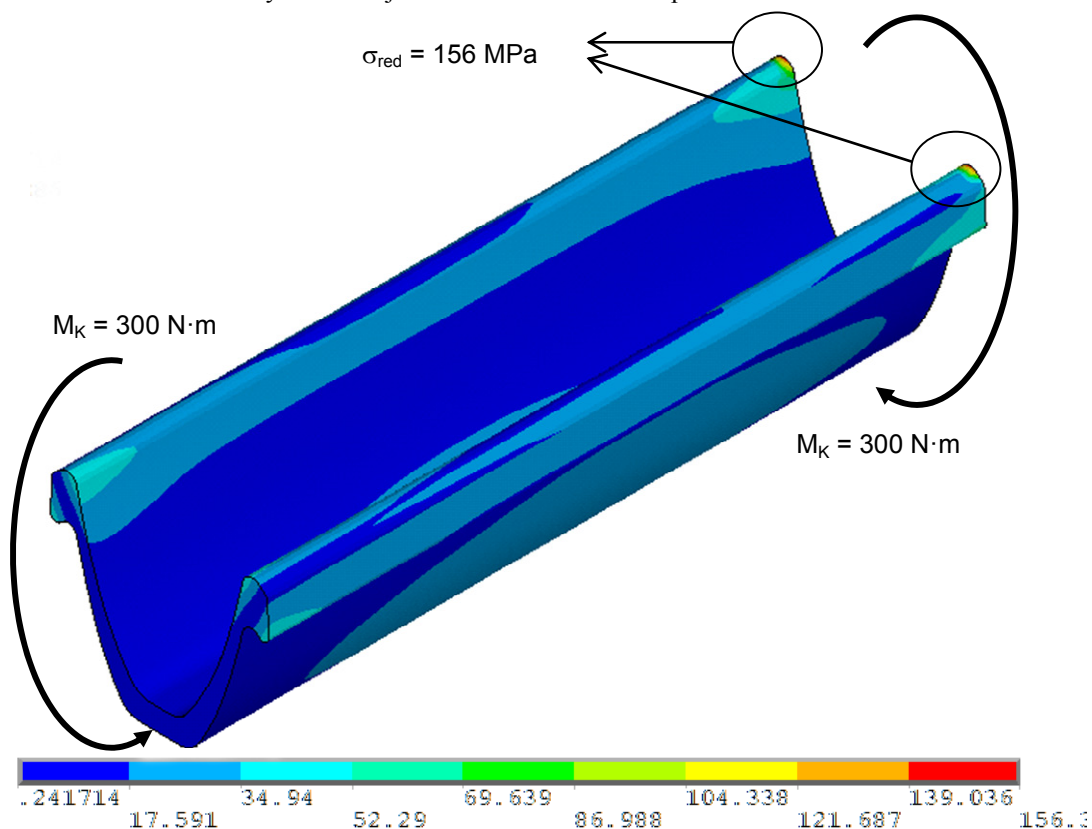
Obr. 14: Kombinace ohybu a kroucení,  $M_K = 20 \text{ N}\cdot\text{m}$



Úhel zkroucení průřezu je cca  $\phi = 0,018^\circ$ . Avšak při následném ohybu, když dojde ke zplastizování nezanedbatelného objemu materiálu, dochází též k velmi výraznému zkroucení. Kroucení téměř nemá vliv na napětí materiálu, avšak velmi výrazně ovlivní deformaci.

Vliv krouticího momentu  $M_K = 300 \text{ N}\cdot\text{m}$  je samozřejmě výraznější, avšak ne zásadní. Redukované napětí dosahuje hodnoty  $\sigma_{\text{red}} = 156 \text{ MPa}$ , ovšem opět pouze lokálně, v místě působící silové dvojice, nikoliv po celém průřezu. Úhel zkroucení je cca  $0,26^\circ$ .

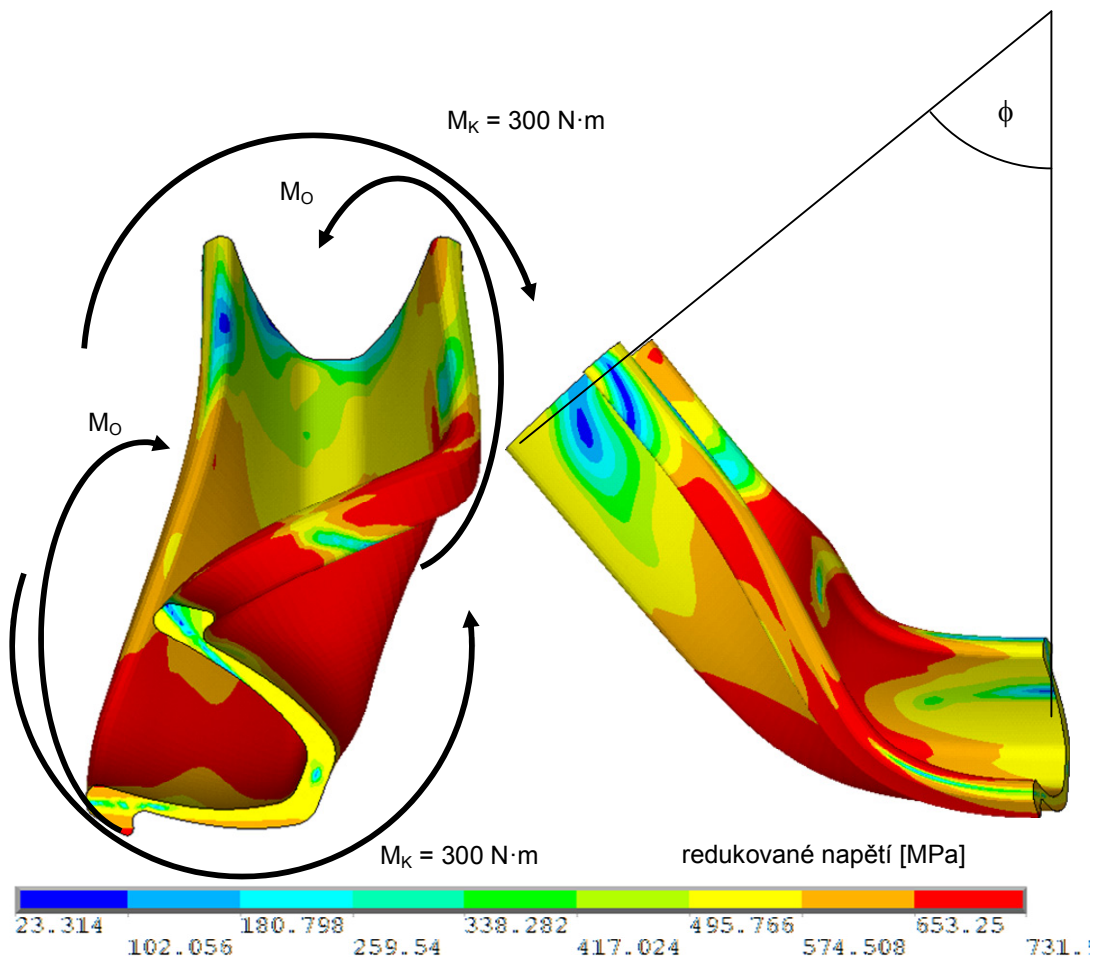
V kombinaci s ohybem však je kroucení velmi zřetelně patrné na deformaci.



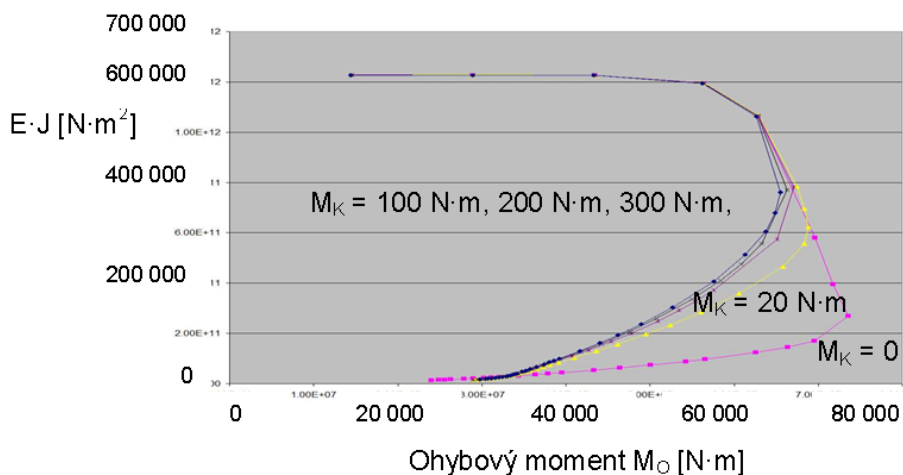
Obr. 15: Čisté kroucení,  $M_K = 300 \text{ N}\cdot\text{m}$

Výsledky výpočtu byly zpracovány stejným způsobem, jako ohyb se současnou normálovou silou. Tedy nejprve charakteristika  $M_O - \phi$ , závislost ohybového momentu na úhlu natočení profilu, následně pak výpočet ekvivalentní ohybové tuhosti  $E \cdot J$  a její závislost na ohybovém momentu. Tato závislost pro různé hodnoty krouticího momentu byla vynesena do grafu.





Obr. 16: Kombinace ohybu a kroucení,  $M_K = 300 \text{ N}\cdot\text{m}$



Obr. 17: Ekvivalentní ohybová tuhost.

Je zřejmé, že již malý kroučící moment způsobí ztrátu stability tvaru při nižším ohybovém momentu, než při čistém ohybu, resp. ohybu s normálovou silou.

## 7 ZÁVĚR

Závěrem lze konstatovat:

- Výpočtový program pro analýzu únosnosti obloukové důlní výztuže, vypracovaný na katedře stavební mechaniky, je dobrým nástrojem jak pro návrh, tak pro údržbu výztuže.
- Na bázi modelování ohybu výztuže metodou konečných prvků lze stanovit nelineární charakteristiku ohýbané výztuže, tedy závislost ohybového momentu na úhlu natočení profilu, a to jak pro čistý ohyb, tak pro kombinaci ohybu a normálové síly a též kombinaci ohybu a kroucení. Z ní pak tabelárně (a graficky) přiřadit každému ohybovému momentu ekvivalentní ohybovou tuhost  $E \cdot J$ .
- Tento postup umožňuje zahrnout zmíněné rysy nelineárního ohybu do výpočtového modelu stejným způsobem, jako geometrickou nelinearitu, tedy změnou geometrické konfigurace, jakož i ohybové tuhosti, a následně opravou matice tuhosti, v každém iteračním kroku.
- Jak ohybová charakteristika, tak z ní odvozená závislost ekvivalentní tuhosti na ohybovém momentu, vykazují bod zvratu, kdy při narůstajícím úhlu ohnutí se ohybový moment začíná zmenšovat. Tento bod představuje ztrátu stability tvaru, kdy při konstantním zatížení dojde ke zhroucení konstrukce.

## PODĚKOVÁNÍ

Projekt byl realizován za finanční podpory ze státních prostředků prostřednictvím Grantové agentury České republiky. Registrační číslo projektu je GAČR 105 / 04 / 0458.

## LITERATURA

- [1] Novák O., Jílek A., Harvančík R., Sobota J.: STAVEBNÍ MECHANIKA. SNTL Praha, 1965.
- [2] Kolář V., Kratochvíl J., Leitner F., Ženíšek A.: výpočet plošných a prostorových konstrukcí metodou konečných prvků. SNTL, Praha, 1979.
- [3] Kolář V., Němec I., Kanický V.: FEM principy a praxe metody konečných prvků. Computer Press, 1997.
- [4] Crisfield M. A.: Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. John Wiley & Sons Ltd, Baffins Lane, Chichester, 1997.
- [5] Randýsková L., Janas P.: Numerické geometricky nelineární řešení soustavy kruhových oblouků pomocí obecné deformační metody. In: Modelování v mechanice, mezinárodní konference. 18. 5. až 19. 5. 2010, VŠB - Technická univerzita Ostrava, Fakulta stavební, Katedra stavební mechaniky, květen 2010, 9 s., ISBN 978-80-248-2234-1
- [6] Randýsková L., Janas P.: Nelineární řešení ocelové obloukové výztuže při existenci pasívních sil. In: Modelování v mechanice, mezinárodní konference. 2. 2. až 3. 2. 2011, VŠB - Technická univerzita Ostrava, Fakulta stavební, Katedra stavební mechaniky, únor 2011, 12 s., ISBN 978-80-248-2384-3.
- [7] Ansys - structural nonlinearities. User's Guide. SAS IP, Inc. 1999.

## Oponentní posudek vypracoval:

Prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc., Fakulta strojního inženýrství, VUT Brno.

Prof. Ing. Juraj Králík, Ph.D., Stavební fakulta STU v Bratislavě.